About Klein-Gordon Equations

Shen Zhirui

1 记号

KG equations(the case of $c = \hbar = 1$):

$$u_{tt} - \Delta u = f(u). \quad u(x,0) = u^0, \quad u_t(x,0) = v^0. \tag{1.1}$$

空间取 $\mathbb{R}^d$ 中的开长方体 Ω, 时间取 $[0,T]$, $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 且导数是 Lipshitz 连续且有界的.

降阶: 令

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad U^0 = \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

则方程化为

$$\partial_t U = LU + F(U), \quad U(0) = U^0. \tag{1.3}$$

此类双曲 (波) 方程, 能量空间为 $X = H^1 \times L^2$, 能量范数 $||(u,u_t)||_1 := ||u||_{H^1} + ||u_t||_{L^2}$, 由此定义能量内积

$$((u^0,u^1),(v^0,v^1)) := \int_\Omega \nabla u^0 \nabla v^0 + u^1 v^1 \, dx. \tag{1.4}$$

按: 直观上, 考虑 $u_{tt} = \Delta u$ 的成立条件, 应该有 $(u,u_t) \in H^2 \times H^1$, 但通过能量方法, 只需要初值在 $H^1 \times L^2$ 中就能保证弱解存在.

2 L 的性质

取 $\Omega = \mathbb{T}^d$.

2.1 何时有界

因为

$$L(u,v) = (v, \Delta u),$$

以及

$$||\Delta u||_{H^s}^2 = \int (1+|x|^2)^s |x|^4 |\widehat{u(x)}|^2 dx \le \int (1+|x|^2)^{s+2} |\widehat{u(x)}|^2 dx = ||u||_{H^{s+2}}^2,$$

故 L 在 $H^{s+2} \times L^p \to L^p \times H^s$ 上是有界的 ($s \in \mathbb{R}$). 若想用指数积分式的数值算法, 则因 L 并非算子, 用处不大.

2.2 算子情形

视 L 为算子

$$L : D(L) \subset X \to X, \quad D(L) :=$$